

SEZIONE AUREA :
ALCUNE PROPRIETA' GEOMETRICHE E NUMERICHE CON
APPLICAZIONI AL DESIGN ARTISTICO-ARCHITETTONICO

SANTORO Esamuele
Facoltà di Ingegneria- Università di Napoli Fed. II(Italy)
esantoro@unina.it

ABSTRACT

In this paper a short history of the *Golden Section* is described, that began from the geometric studies of the Pythagoreans on the property of the pentagon and assumed importance in order to obtain graphical solutions of algebraic equations, some regular polygons and for the construction of the five solid platonic ones. The recurrence properties of the gold section allowed to define a particular spiral curve that was found evocative by suggested some great mathematicians and/or astronomers as Euclide, Keplero, ecc..

The geometric studies of Piero della Francesca on XV century and the publication of *Divina Proportione* by L. Pacioli marked in the Early Renaissance the beginning of a new interest in the artistic-architectural theories towards the Golden Section. Some numerical relationships of the Golden Section were studied with a new interest in XIX century from the mathematicians , and many equations with Fibonacci numbers were found. In these last two centuries the Golden Section has been applied in several situations in art and architecture to obtain aesthetically pleasant proportions. Some applications in the artistic and architectural fields are shown.

Key words: Gold Section, Number Theory, architectural design proportion, Drafting Construction.

1. Introduzione

Le proporzioni ottenute dalla *Sezione Aurea* hanno sempre attirato l'attenzione di artisti e progettisti, non a caso si ritiene che la denominazione di *Sezione Aurea* sia stata data da uno dei più grandi artisti e progettista dell'Umanità che è stato Leonardo da Vinci [1]. I primi ben documentati studi sulle proprietà geometriche della *sezione aurea*, che apparvero magiche ed esoteriche, furono di Pitagora (580-500 a.C.), la cui Scuola aveva per motto "Tutto è numero".

Alcuni studiosi hanno cercato di dimostrare, spesso volte forzando alcune misurazioni, che le proporzioni ottenute dalla *sezione aurea* furono utilizzate anche prima di Pitagora come criteri di progettazione architettonica. Tra queste opere viene indicata la piramide di Cheope, costruita verso il 2500 a.C, che di fatto presenta le principali proporzioni architettoniche legate alla *sezione aurea*. I pitagorici descrissero le proprietà di molte figure geometriche mediante l'aritmetica, ma una figura che attirò maggiormente la loro attenzione fu il pentagono stellato (pentagramma o pentacolo), ottenuto tracciando le cinque diagonali di un pentagono regolare.

Le diagonali del pentagono permettono di definire diversi triangoli isosceli, che risultano simili tra di loro, in particolare se si considerano i triangoli simili AA_1B e BDE si ha

$$\frac{BE}{BA_1} = \frac{DE}{AA_1} = \frac{BA_1}{A_1E} \quad (1)$$

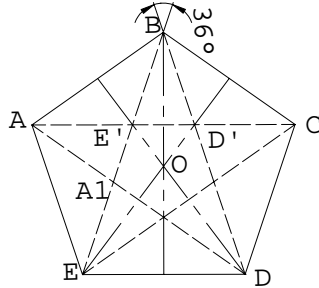


Figura 1: Pentagono stellato

La diagonale AD del pentagono divide la diagonale BE in due segmenti BA₁ e A₁E tali che il rapporto tra la diagonale e il segmento maggiore BA₁ è uguale al rapporto tra il segmento maggiore e il minore A₁E. La precedente costruzione permette di dividere una linea in *media ed estrema ragione* e il segmento maggiore BA₁ viene indicato come “*sezione aurea*” della linea BE. Se indichiamo con d₀ la lunghezza della diagonale e con x la sua *sezione aurea*, il valore di x è dato dalla soluzione algebrica dell’equazione di secondo grado

$$\frac{d_0}{x} = \frac{x}{d_0 - x} \rightarrow x^2 + x d_0 = d_0^2 \quad \text{da cui} \quad x = \frac{d_0}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) = d_1 \quad (2)$$

Per BE = d₀ = 1 si ha che una soluzione della (2) è uguale a BA₁ = d₁ = 0.618034..., mentre l’altra soluzione in valore assoluto è 1/BA₁ = 1.618034.... Spesso in letteratura il numero irrazionale rappresentato da 1/BA₁ è indicato con Φ in onore dello scultore Fidia, che fu tra i primi a utilizzare tale numero nelle proporzioni delle sculture decorative del Partenone. Mentre i progettisti (Ictino e Callicrate), pur conoscendo le proprietà della *sezione aurea* perché il Partenone fu costruito verso gli anni 440 a.C., non la utilizzarono come criterio di progetto. Alcune volte si indica come sezione aurea il valore di φ = BA₁ = 1/Φ.

Per la (1) i valori della sezione aurea soddisfano le equazioni

$$1 + \Phi = \Phi^2 \quad 1 - \varphi = \varphi^2 \quad (3)$$

da cui sarà possibile ottenere delle formule ricorsive sulla *sezione aurea*.

Euclide, nelle Proposizioni 11 (Libro II) e 30 (Libro VI) degli *Elementi*, propose un metodo grafico per la soluzione della (2) e iterando la costruzione grafica ottenne dei *rettangoli aurei*, i cui rapporti tra il lato maggiore e quello minore era uguale a Φ. Oltre agli *Elementi*, Euclide scrisse altri libri come l’*Ottica*, che contiene i primi studi di prospettiva, ripresi più di 1700 anni dopo dal pittore e matematico Piero della Francesca.

Se si considerano gli angoli della Figura 1 è possibile trovare una relazione tra la *sezione aurea* e un altro importante numero irrazionale che è π. Infatti, si ha che l’angolo EBD = 36° = π/5, per cui se si pone BE = 1 si ha

$$ED = \varphi = 2 \sin(\pi/10)$$

Pertanto, in un triangolo isoscele, i cui angoli sono (72°, 36°, 72°), il rapporto tra il lato e la sua base è uguale alla sezione aurea, tale triangolo è detto *aureo*. Mentre se si considera il triangolo

isoscele ABE, i cui angoli sono $(36^\circ, 108^\circ, 36^\circ)$ si ha che il rapporto tra la base e il lato è uguale a Φ , tale triangolo è indicato come *gnomone aureo*.

Se si considera un decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio R, la lunghezza del suo lato è uguale a

$$l_{10} = R \cdot 2 \sin(\pi/10) = R \cdot \varphi \quad (4)$$

per cui il rapporto tra il raggio della circonferenza e il lato del decagono inscritto risulta essere uguale a Φ .

Mentre, il lato e la diagonale di un pentagono regolare e il raggio della sua circonferenza circoscritta sono legate dalle seguenti relazioni

$$l_5 = d_0 \cdot \varphi \quad d_0 = 2R \cos(\pi/10) \rightarrow l_5 = 2\varphi \cdot R \cdot \cos(\pi/10)$$

Tenuto conto che il lato di un esagono è uguale al raggio della circonferenza circoscritta

$$l_6 = R$$

si ha dalle precedenti equazioni che

$$l_{10}^2 + l_6^2 = l_5^2 = R^2 \cdot (3 - \Phi) \quad (5)$$

per cui i lati di un decagono, esagono e pentagono iscritti in una circonferenza di raggio R sono i lati di un triangolo rettangolo.

Tale teorema fu dimostrato da Euclide nella Proposizione 9 del Libro XIII.

Tolomeo di Alessandria (130-200) autore dell'*Almagesto*, che fu il testo di trigonometria più significativo dell'antichità, nel calcolare e valori delle tavole trigonometriche, ricorse al precedente teorema di Euclide per calcolare le corde di 36° e 72° , e quindi indirettamente utilizzò per i suoi calcoli il valore della *Sezione Aurea*.

Tolomeo, oltre ad essere un matematico, fu anche un geografo e autore del trattato *Analemma*, in cui per la prima volta si descrivevano: a) le proiezioni ortografiche su tre piani tra di loro ortogonali, b) la proiezione stereografica, dove il piano di proiezione è quello dell'equatore mentre le linee di proiezione convergono verso il polo.

Da Euclide fino a Pappo (IV sec d.C.), Alessandria era diventata il più importante centro scientifico della matematica greca, il cui anno di inizio è il 306 a.C., quando Tolomeo I fondò una scuola, nota come Museo, e chiamò come docenti Euclide e Eratostene (276-194 a.C.), quest'ultimo assunse anche l'incarico di bibliotecario del Museo ed è noto per aver effettuato una misura molto precisa del raggio della Terra. Oltre ai due precedenti primi matematici e a Tolomeo ad Alessandria se ne formarono molti altri come Apollonio di Perga (262-190 a.C.), noto nell'antichità come "il Grande Geometra" e autore di un testo sulle Coniche, Diofanto, Erone, Tolomeo, Teone di Alessandria, ecc.. Con l'uccisione nel 415 di Ipatia da parte di fanatici cristiani, che era una studiosa di Apollonio e Diofante e figlia di Teone, si ebbe il declino della ricerca scientifica e matematica in Europa [2].

Fu merito degli arabi se non andarono distrutti molti testi della matematica greca, che li tradussero in arabo e alcune città arabe come Bagdad divennero i nuovi centri cosmopoliti della ricerca scientifica. A Bagdad insegnarono al-Khuwarizmi, famoso per un trattato di Algebra pubblicato nell'anno 825, e Abu-Kamil Shoja ben Aslam, autore del trattato *Sul pentagono e decagono*, pubblicato verso l'anno 850, in cui si serviva della *sezione aurea* per la soluzione di grafici di equazioni algebrici.

Verso gli anni mille alcuni matematici europei poterono riscoprire la matematica greca attraverso i testi arabi e tra questi vi fu Leonardo da Pisa, noto col nome di Fibonacci (1180-1250). Fibonacci fu autore del trattato *Liber Abaci*, che oltre ad introdurre in Europa il nostro attuale sistema di numerazione decimale, indagò i legami tra l'aritmetica e la geometria, e influenzato dal trattato di Abu Kamil, studiò le proprietà della *sezione aurea*. Fibonacci

trascorse molto tempo presso la corte di Federico II, che a quel tempo era uno dei centri culturali europei più vivi e importanti, e lo stesso imperatore Federico II mostrò interesse verso la matematica e in particolare sulle proprietà dei numeri e della *Sezione Aurea*.

Attualmente, Fibonacci viene ricordato per una particolare serie numerica ricorsiva, che fu ottenuta risolvendo un problema di crescita di una popolazione di conigli. Tale serie numerica ha delle proprietà che sono in relazioni alla *Sezione Aurea*.

Un altro studioso che si interessò della *Sezione Aurea* fu Giovanni Campano (1220-1296), che non a caso commentò e tradusse in latino gli *Elementi* di Euclide e l'*Almagesto* di Tolomeo.

Con l'inizio del Rinascimento si ha una riscoperta dell'architettura e degli autori classici, le proprietà della *Sezione Aurea* vengono riscoperte e applicate nel campo artistico-architettonico. In particolare, il matematico Luca Pacioli (1445-1517) le dedicò un intero trattato *La Divina Proporzione*. In cui riportava anche i contributi e risultati ottenuti da Piero della Francesca (1416-1492), che oltre ad essere un grande pittore era anche un eccellente matematico. Molte figure di poliedri regolari riportate nel trattato di Pacioli furono eseguite da Leonardo da Vinci (1452-1519). Un artista che fu molto influenzato da *La Divina Proporzione* fu Albrecht Durer (1471-1528), che in molte sue opere evidenzia i legami tra la matematica e la pittura. L'influenza del trattato di Pacioli non si limitò solo al campo artistico-architettonico ma innescò anche riflessioni di tipo teologico e filosofico per il nome *Divina* dato alla *sezione aurea*.

Nel XVI secolo, un altro matematico che restò affascinato dalla *Sezione Aurea* fu Keplero (1571-1630), e nel suo trattato *l'Harmonices mundi* la considerò insieme al teorema di Pitagora, un "gioiello prezioso della matematica". Keplero trovò un'interessante relazione tra i numeri di Fibonacci e propose un modello cosmologico che si basava sui cinque solidi regolari, la cui costruzione dipendeva dalla *sezione aurea*.

Il matematico Jacques Bernoulli (1654-1705) studiò le proprietà della *sezione aurea* e le dedicò il trattato *Spira mirabilis*, in cui analizzava le proprietà di una spirale logaritmica, che Euclide aveva ottenuto nella costruzione dei *rettangoli aurei*. Nell'immensa produzione scientifica di Eulero (1707-1783) si trovano alcuni studi che riguardano anche la *sezione aurea*.

Nel 1837 M. Chasles pubblicò l'importante trattato "*Aperçu Historique sur l'origine et développement des Méthodes en Géométrie*" in cui descriveva anche la storia della *Sezione Aurea* a partire da Pitagora. Con tale trattato si ebbe un rinnovato interesse dei matematici verso la *Sezione Aurea*, che scoprirono ulteriori proprietà geometriche e numeriche. Fra questi vi fu J.P. Marie Binet (1776-1856), professore del Polytechnique di Parigi, studioso di geometria descrittiva, teoria delle matrici, equazioni lineari alle differenze finite, ecc. .

Nel 1843 Binet ottenne un'equazione, nota come equazione di Binet, in cui la potenza n -ma della *Sezione Aurea* era definita mediante i numeri della serie di Fibonacci. Tale equazione era stata dimostrata nel 1765 anche da Eulero, che l'aveva riportata in una delle sue ricerche.

Un altro matematico che si interessò della *Sezione Aurea* fu F.E.A. Lucas (1842-1891), docente anche lui presso il Polytechnique di Parigi e studioso di Teoria dei Numeri e di complessi problemi computazionali, come quello della Torre di Hanoi. Lucas definì ricorsivamente dei numeri che si basavano su quelli di Fibonacci. Anche i numeri di Lucas presentano interessanti relazioni con la *Sezione Aurea*.

Dopo più di 2500 anni le proprietà della *sezione aurea* affascinano ancora i matematici e alcuni problemi come il ricoprimento non-periodico di superficie piane mediante tasselli presenta alcune soluzioni che si basano sulla *sezione aurea* [222]. Anche lo studio delle simmetrie pentagonali ha avuto delle recenti applicazioni nel campo dei materiali con l'osservazione di particolari forme cristalline, dette quasi-cristalli, che si basano sulla *sezione aurea*. Un'ultima applicazione della *sezione aurea* è nel campo della Teoria dei Frattali e ciò dipende dalla sua ben nota proprietà di auto-riproduzione.

Nel campo artistico-architettonico l'interesse verso la *sezione aurea* è stato per molto tempo ignorato e solo a partire dal XIX secolo vi furono degli studi sulle proporzioni in natura e nell'arte in cui la *sezione aurea* veniva assunta come uno dei principi nelle proporzioni artistiche e architettoniche [5,6,7,8].

2. Proprietà geometriche e costruzioni grafiche della Sezione Aurea

Nell'antichità molti problemi geometrici ed algebrici venivano risolti graficamente, anzi alcuni problemi venivano risolti solo per via grafica utilizzando riga e compasso. In particolare, la soluzione grafica della *sezione aurea* interessò molto i matematici greci, perché la costruzione dei cinque solidi regolari, conosciuti come solidi platonici, che furono una delle scoperte più importanti dei pitagorici, richiedeva la conoscenza della *sezione aurea*.

Una soluzione grafica che permette di calcolare la *sezione aurea* di una linea è riportata nella parte superiore della Fig. 2, dove $OA_0=d_0$ è la linea data. Se si pone $OB=d_0/2$ si ha $BC=BA_0 = d_0\sqrt{5}/2$, per cui $OA_1=OC=BC-OB= d_0(\sqrt{5}-1)/2=d_1$ è il valore della *sezione aurea* di d_0 .

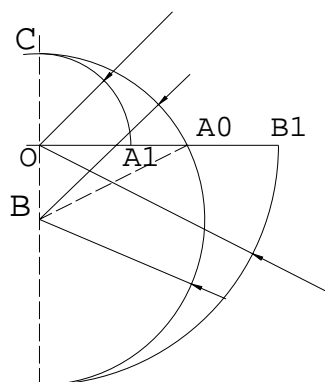


Fig.2 : I Costruzione grafica sezione aurea

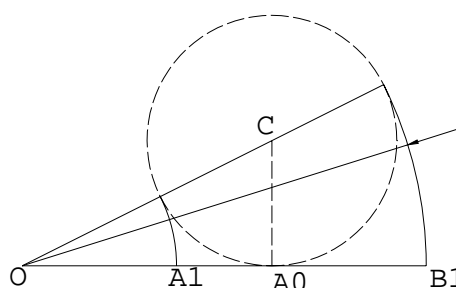


Fig. 3: II Costruzione grafica sezione aurea

Nella parte inferiore della Fig. 2 è riportata la soluzione negativa della (2), che per comodità si riporta sulla parte destra per avere valori positivi delle lunghezze, dove si ottiene la linea $OB_1 = d_0(\sqrt{5}+1)/2 = d_0 \Phi$, che rappresenta la linea la cui sezione aurea è $d_0 = OA_0$.

In fig. 3 è riportata un'altra costruzione dove $CA_0 = OA_0/2$, il segmento OA_1 è la *sezione aurea* della linea OA_0 , oppure OB_1 è la linea avente per *sezione aurea* il segmento OA_0 .

Nella Fig. 4 è riportata la costruzione grafica proposta da Euclide, che permette di ottenere la linea OB_1 la cui *sezione aurea* è il segmento OA_0 .

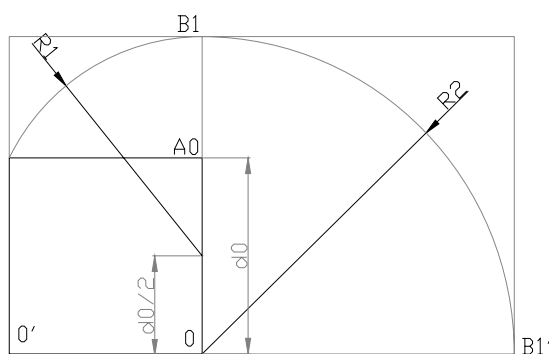


Fig.4: Costruzione grafica di Euclide per la sezione aurea

L'interesse verso la costruzione grafica della sezione aurea è ancora attuale, come dimostra l'articolo [9] pubblicato nel 2002.

Se si considera il rettangolo della Fig. 4 avente per lati i segmenti $d_1 = OB_1$ e $d_0 = OA_0 = O'O$ si ha per costruzione che il rapporto tra d_1 e d_0 è uguale a Φ , un tale rettangolo è detto *rettangolo aureo*. Euclide notò che se si costruisce un rettangolo più grande avente per lato minore il segmento d_1 e per lato maggiore $O'B_1' = d_2 = d_1 + d_0$, tale rettangolo risulta anche esso *aureo*, poiché d_1 è la sezione aurea di d_2 . Infatti dalla proprietà della sezione aurea si ha

$$\varphi = \frac{d_0}{d_1} = \frac{d_1 - d_0}{d_0} \rightarrow \frac{d_0 + d_1}{d_1} = \frac{d_1}{d_0} = \varphi + 1 = \Phi \quad (6)$$

Euclide osservò che gli archi di circonferenza, tracciati per ottenere i *rettangoli aurei*, individuano una spirale logaritmica, che viene indicata come *spirale aurea*. Le diagonali congiungenti i vertici dei *rettangoli aurei*, che non sono punti di tangenza della *spirale aurea*, si intersecano tutte in un punto, che è il centro della spirale aurea, indicato dal matematico C.A. Pickover come “occhio di Dio”, perché la spirale tende al suo centro solo per un numero infinito di iterazioni. Si osserva che la forma della spirale si conserva sia verso dimensioni infinitesimali sia verso dimensioni infinite e quindi potrebbe essere un modello di crescita per la simulazione di molti fenomeni naturali in cui la proprietà di auto-somiglianza deve essere soddisfatta. Se il rettangolo aureo ABCD ha $BC=\Phi$ e quindi $AB=1$, si ha che i raggi dei raccordi che formano la spirale hanno lunghezza uguale a

$$R_i = \Phi^i \quad \text{per} \quad -\infty < i < +\infty$$

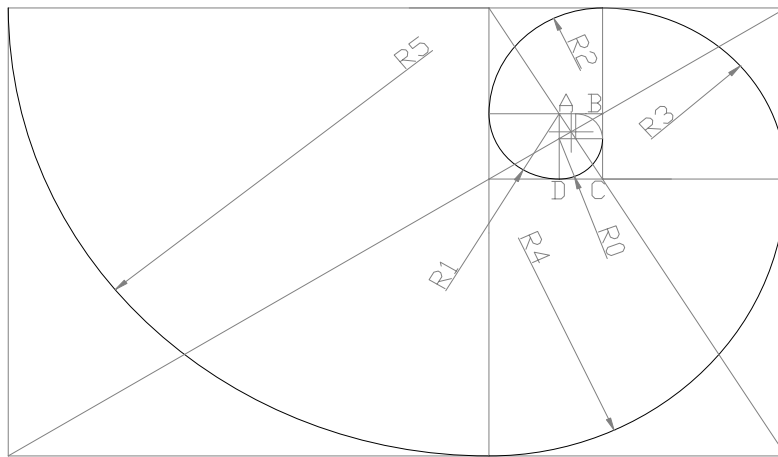


Fig.5: Spirale aurea ottenuta dai rettangoli aurei

Per $i < 1$ la spirale è contenuta nel rettangolo ABCD e se $i \rightarrow -\infty$ la spirale tende verso il suo centro. Ovviamente, per avere da un *rettangolo aureo* di dimensione minore è sufficiente sottrarre al dato rettangolo aureo un quadrato avente per lato il suo lato minore.

La proprietà di auto-somiglianza è una delle tante legate alla *sezione aurea*, che è soddisfatta anche per i *triangoli e gnomoni aurei*. Infatti se si traccia la bisettrice di un angolo alla base del *triangolo aureo* si ottengono un *triangolo aureo* e uno *gnomone aureo*. Analogamente, se si traccia la bisettrice dell'angolo al vertice di uno *gnomone aureo* si ottengono un *triangolo aureo* e un altro *gnomone aureo*.

La semplice costruzione per ottenere *rettangoli aurei* maggiori o minori è simile ad un'altra costruzione riguardante i formati ISO dei fogli di disegno, anche in questo caso il numero che interviene è un numero irrazionale ($\sqrt{2}$).

Anche la costruzione grafica del pentagono regolare proposta da Tolomeo, che è quella riportata negli attuali testi di Disegno (Fig. 6), si basava sulla *sezione aurea*. Infatti se si considera una circonferenza di raggio R, si ha $R_1 = R\sqrt{5}/2$, per cui $OB = R(\sqrt{5}-1)/2 = R\varphi$ è il lato del decagono inscritto alla circonferenza. L'ipotenusa AB, del triangolo rettangolo OAB, per il teorema di Euclide (5), è uguale al lato del pentagono regolare inscritto alla circonferenza di raggio R.

che rappresentano due progressioni geometriche di ragione, rispettivamente, φ e Φ .

Dalla (6) o analizzando la costruzione ricorsiva dei rettangoli aurei si ottengono le seguenti formule ricorsive

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= d_{i-1} - d_i \\ D_{i+1} &= D_{i-1} + D_i \end{aligned} \quad (9)$$

dove d_0 e D_0 sono assegnati, mentre le altre condizioni iniziali per $i=1$ sono date dalle (7.a) e (7.b).

Una importante relazione tra sezione aurea e numeri di Fibonacci si ottiene sviluppando le potenze di φ e Φ , che per la (3) danno

$$\begin{aligned} \Phi^3 &= \Phi(1 + \Phi) = 1 + 2\Phi & \varphi^3 &= \varphi(1 - \varphi) = -1 + 2\varphi \\ \Phi^4 &= \Phi \cdot \Phi^3 = 2 + 3\Phi & \varphi^4 &= \varphi \cdot \varphi^3 = 2 - 3\varphi \\ \Phi^5 &= \Phi \cdot \Phi^4 = 3 + 5\Phi & \varphi^5 &= \varphi \cdot \varphi^4 = -3 + 5\varphi \\ \dots & & \dots & \\ \Phi^i &= F_{i-1} + F_i \Phi = F_{i+1} + F_i \varphi & \varphi^i &= (-1)^i F_{i-1} + (-1)^{i-1} F_i \cdot \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

Infatti, i numeri F_i che compaiono nella potenza i -ma di φ e Φ sono i numeri di Fibonacci, definiti dalla formula ricorsiva [10,11,12]

$$\begin{aligned} F_{i+1} &= F_{i-1} + F_i \quad \text{per } i > 1 \\ \text{con condizioni iniziali } & F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

I primi numeri della serie di Fibonacci sono $F = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\}$

Si osserva che le formule ricorsive (11) e (9) sono simili e differiscono per le sole condizioni iniziali. Sommando le potenze i -me di Φ e dell'opposto di φ si ha per la (10)

$$\Phi^i + (-\varphi)^i = F_{i+1} + F_{i-1} = F_i + 2F_{i-1} = L_i \quad (12)$$

dove i numeri L_i sono i numeri di Lucas, definiti da una formula ricorsiva simile a quella dei numeri di Fibonacci

$$L_{i+1} = L_i + L_{i-1} \quad \text{per } i > 1 \quad \text{dove } L_1 = 1, L_2 = 3$$

Viceversa, se si sottraggono le precedenti due potenze si perviene alla classica formula di Binet

$$\Phi^i - (-\varphi)^i = \sqrt{5} F_i \quad (13)$$

La relazione di Keplero tra i numeri di Fibonacci, che fu ottenuta anche da Cassini nel 1680, e spesso in letteratura è indicata come formula di Cassini, è la seguente

$$F_i^2 = F_{i-1} \cdot F_{i+1} - (-1)^i \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} F_{i-1} & F_i \\ F_i & F_{i+1} \end{bmatrix}$$

E' interessante notare come molti astronomi, nel passato e nel presente, furono e sono affascinati dalla *sezione aurea* e su di essa hanno costruito dei modelli per meglio rappresentare l'armonia dell'universo.

Un'altra importante relazione tra i numeri F_i e la sezione aurea si ottiene dalla frazione continue, studiate per la prima volta da Eulero, che sono del tipo

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n}}}}$$

Dalla (3) si ha che Φ può essere espressa nella seguente frazione continua

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{\Phi}}}} \quad (14)$$

e quindi se la precedente frazione viene troncata all'n-mo termine si ottiene un valore approssimato di Φ . Anche il rapporto tra due numeri consecutivi della serie di Fibonacci può essere rappresentato dalla frazione continua

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots \frac{F_2}{F_1}}}} \quad (15)$$

Confrontando la (14) e la (15) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \Phi \quad (16)$$

Ad esempio, se si calcola la (16) per $n=10$ si ha $F_{11}/F_{10}=89/55=1.61818..$ che è un valore molto prossimo a Φ . Se si sviluppa il numero di Fibonacci di indice $n+k$ si ha

$$F_{n+k} = F_{i+1} \cdot F_{n+k-1} + F_i \cdot F_{n+k-i+1} \quad \text{per } 1 \leq i \leq k-1$$

In particolare per $i=k-1$ e $k=n$ si ottiene

$$F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n \quad ; \quad F_{2n} = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_n = F_n \cdot (F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n \cdot L_n$$

Dalle precedenti equazioni si ha che il rapporto tra due numeri di Fibonacci di indice $n+i$ e n è dato da

$$\frac{F_{n+i}}{F_n} = F_i \frac{F_{n+1}}{F_n} + F_{i-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+i}}{F_n} = \Phi^i \quad (17)$$

Da un quadrato di lato unitario è possibile ottenere graficamente, con un procedimento simile a quello adottato per ottenere i *rettangoli aurei*, dei rettangoli i cui lati sono due numeri consecutivi della serie di Fibonacci. La spirale che si ottiene è costituita da archi di circonferenza di raggio $R_i=F_i$ e per la (17) tale spirale tende verso la *spirale aurea*.

L'algoritmo ricorsivo dei numeri di Fibonacci o della sezione aurea è simile ad altri algoritmi ricorsivi che permettono di calcolare ad esempio le funzioni B-spline o i numeri del triangolo di Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pertanto, molte formule si possono ottenere in cui i numeri di Fibonacci sono definiti in funzione dei numeri del triangolo di Pascal. Per avere una più completa informazione sulle proprietà numeriche della sezione aurea e dei numeri di Fibonacci si rinvia ad alcuni testi specifici [2,4,5], ai trattati sul Teoria dei Numeri [4,5], in cui vi è sempre una parte dedicata alla Sezione Aurea e ai numeri di Fibonacci., o alle pubblicazioni che di continuo appaiono sulle riviste [5].

Tra le tante particolari formule che legano la sezione aurea al numero 5 è la seguente

$$\Phi = \left[\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \right]^{0.5}$$

4. Applicazioni al design artistico-architettonico

Le prime ben documentate applicazioni della sezione aurea al design artistico furono le sculture eseguite da Fidia per il Partendone. Sulla piramide di Cheope, lo storico Erodoto (485-425 a.C), che già conosceva i risultati geometrici ottenuti dai pitagorici, riportò che il criterio progettuale adottato dagli architetti della piramide di Cheope era quello di avere una piramide a base quadrata, la cui faccia laterale fosse equivalente all'area di un quadrato avente per lato l'altezza della piramide [13,14,15]. Ebbene, assumendo tale criterio di progetto risulta che rapporto tra l'altezza della faccia laterale (h_1) e la metà della base è uguale a Φ . Se si considerano le dimensioni reali della piramide si che il lato della base è $b=230.35$ m mentre l'altezza è $h=146.73$ m. Con questi valori si ottiene $h_1/0.5 \times b = 186.534/115.175 = 1.61957$, che differisce effettivamente di molto poco da $\Phi=1.61803..$

Da quei pochi documenti egizi risalenti al 2500 a.C. risulta che gli egizi non conoscevano la sezione aurea ma, per esigenze di misurare il perimetro di una circonferenza, conoscevano un valore approssimato del numero π , per cui tale numero, che doveva sembrare magico, potrebbe essere stato utilizzato dai progettisti. Infatti, se si fosse assunto come criterio di progettazione quello di avere una piramide tale che il perimetro della base fosse uguale a quella della circonferenza avente per raggio

$$\frac{2b}{h} = \pi \quad \rightarrow \quad \frac{h}{b/2} = \frac{4}{\pi} = 1.27327$$

e dalle misure della piramide risulta che questo criterio è soddisfatto con maggiore precisione, poiché $2h/b=1.27397$. E' interessante osservare che se si esegue il quadrato di $4/\pi$ si ha una buona approssimazione di Φ

$$\left(\frac{4}{\pi} \right)^2 = 1.621 \cong \Phi \tag{17}$$

La (17) è un'altra semplice relazione approssimata che lega Φ a π .

L'architetto romano Vitruvio (I Sec. d.C.) non fa nessun riferimento alle proprietà della *sezione aurea* nel suo trattato *Architectura*, nonostante che tale numero venisse utilizzato nella progettazione architettonica e inoltre lui riteneva che la formazione di base di un architetto doveva basarsi sull'aritmetica e la geometria. La presenza di Fibonacci presso la corte di Federico II ebbe un'influenza su alcune scelte progettuali, come quelle adottate per la costruzione di un castello in Puglia (1240) a pianta ottagonale, in cui la geometria del pentagono appare già sulla facciata principale

Il trattato del Pacioli influenzò il design architettonico del Rinascimento, anche se non appare mai nei trattati architettonici, come quello pubblicato da Sebastiano Serio (1475-1554) in cui si consiglia di utilizzare proporzioni commensurabili. Mentre, furono soprattutto le opere degli artisti come Piero della Francesca e Leonardo a influenzare la pittura, perché adottarono in modo consapevole delle proporzioni degli spazi ottenute dalla *sezione aurea*.

Nel XIX secolo, furono le ricerche di un teorico come Adolf Zeising (1810-1870) sulle proporzioni in architettura, a riproporre la *sezione aurea* come criterio per ottenere delle proporzioni che permettessero di bilanciare l'unità e la varietà del prodotto architettonico.

Nel XX secolo, Ernst Neufest (1900-1986) ripropone la *sezione aurea* (Der goldener Schnitt) nel suo trattato *Bauordnungslehre* (1943) per avere le proporzioni nel design architettonico.

Un altro grande architetto del XX secolo, che collegandosi ad una concezione antropomorfa sempre viva in architettura a partire da Vitruvio, introdusse la sezione aurea nel design architettonico fu Le Corbusier (1887-1965), che pubblicò nel 1948 e 1955 due trattati (*Le Modulor*, *Le Modulor II*), in cui cercava di stabilire dei criteri architettonici sulla base che *la natura è matematica*. In tale trattato, nel definire le proporzioni e le dimensioni standard di un corpo umano utilizzò la *Sezione Aurea* e i numeri di Fibonacci, perché " .. on a démontré, at principalement à la Renaissance, que le corp humain obéit à la règle d'or".

Nel campo delle arti pittoriche, agli inizi del secolo scorso, molti pittori appartenenti al cubismo parteciparono alla mostra sulla *Section d'Or*, e la *sezione aurea* fu utilizzata per meglio scomporre le figure mediante poliedri. Il pittore italiano Gino Severini (1883-1966) utilizzò nelle sue opere la *sezione aurea* e cercò di fondere alcuni principi del cubismo con quello del futurismo.

Nel 2003 un gruppo di pittori americani si sono basati solo sui rettangoli aurei per la realizzazione delle loro opere, che vengono indicate come *Sacred Geometry*. Una di tali opere viene qui riportata.

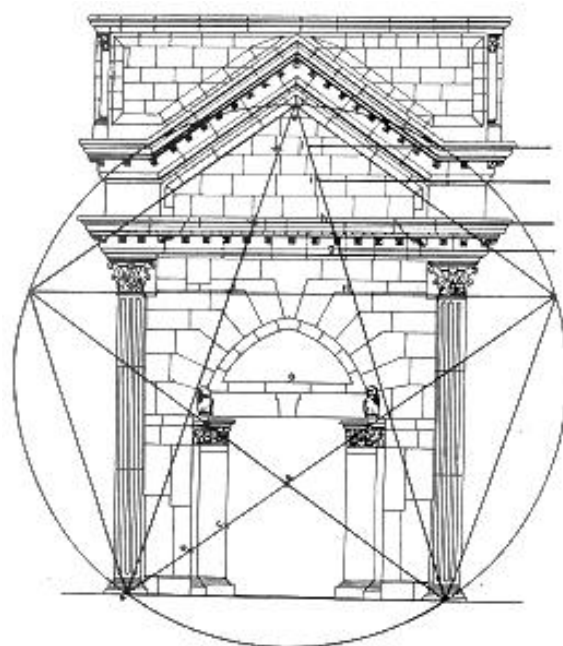
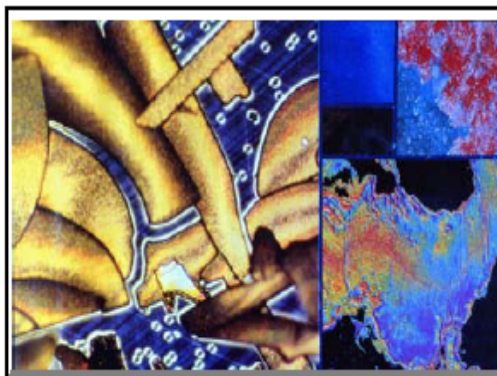
Un altro settore artistico in cui la sezione aurea è stata utilizzata è quello musicale, dove è importante adottare una struttura compositiva in cui il rapporto dei tempi sia ben definito per meglio percepire l'armonia musicale. Non a caso il primo che collegò la musica alla matematica fu Pitagora.

5. Conclusioni

Studi psicologici hanno confermato che l'uomo percepisce meglio quei rapporti sia dello spazio sia del tempo che sono prossimi alla sezione aurea.

L'uomo ha sempre cercato di costruire delle forme perfette e in tale ricerca la geometria è stata uno strumento indispensabile. Se analizziamo le proporzioni del nostro corpo osserviamo che sono legate alla sezione aurea (calcolate il rapporto tra la vostra altezza e l'altezza del vostro ombelico), per cui se l'uomo è la misura di tutte le cose ne consegue che questa armonia è presente in molte cose, dalle piccole fino agli ammassi stellari come le galassie. Per chi crede in un Dio creatore non può non riconoscere che anche Lui si è servito della geometria nella creazione dell'Universo.

La nostra maggiore sensibilità verso la *sezione aurea* non è solo utilizzata dagli artisti per meglio apprezzare l'armonia e l'estetica, ma può essere utilizzata per renderci più gradevoli degli oggetti di consumo come le Carte di Credito il cui formato è un rettangolo aureo.



6. Bibliografia

- [1] LIVIO M. , *The Golden Ratio : The story of Phi, the world's most astonishing number*. Broadway Pub. ,New York, 2003
- [2] BOYER C.B., *Storia della matematica*. Oscar Mondatori, 1990
- [3] R.L. GRAHAM,D.E.KNUTH,O.PATASHNIK, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Pub. Company, Ney York, 1989
- [4] MOLLIN R. A. , *Fundamental NUMBER THEORY with APPLICATIONS*, CRC Press, New York,1997
- [5] SUBHASH K., *The Golden Mean and the Phisics of Aesthetics*, Archive of Phisics, 2004
- [6] FRINGS M., *The Golden Section in Architectural Theory*, www.nexusjournal.com/Frings.html
- [7] GIELO-PERCZAK K. , *The golden section as a harmonizing feature of human dimensions and workplace design . Theoretical Issue in Ergonomics Science , 2003, n. 2, 336-350*
- [8] KIMBERLY Elam , *Geometry of design : studies in proportion and composition*, Princeton Architec. Press, New York, 2001
- [9] K. HOFSTETTER, *A Simple Construction of the Golden Section*, *Forum Geometricorum*, Vol. 2 , 2002, 65-66
- [10] VAJDA S., *Fibonacci & Lucas Number and the Golden Section : Theory and Application . J. Wiley & Sons, 1989*
- [11] DUNLAP C.A., *The Golden Ratio and Fibonacci Number* , World Scientific Press, 1997
- [12] KALMAN D., MENA R., *The Fibonacci Numbers-Exposed. Mathematics Magazine*, Vol. 76, 2003, pp. 167-181
- [13] ROSSI C., TOUT C.A.. *Were the Fibonacci Series and the Golden Section known in Ancient Egypt ?*. *Historia Mathematica*, 2002, n.2, 101-113
- [14] NEVEUX Marguerite, *Le mythe du nombre d'or*, Société d'éditions scientifiques, 1995, Paris
- [15] ODIFREDDI P., *La Sezione Aurea. LE SCIENZE*, 2004, 77-81